المحاضرة الاولى

مفهوم المتغيرة العشوائية المتقطعة وتوزيعها الاحتمالي[1]

مفهوم المتغيرة العشوائية
مفهوم المتغيرة العشوائية المتقطعة
التوزيع الاحتمالي للمتغيرة العشوائية المتقطعة
شروط دالة الكثافة للمتغيرة العشوائية المتقطعة
التمثيل البياني لدالة الكثافة للمتغيرة العشوائية المتقطعة
دالة التوزيع للمتغيرة العشوائية المتقطعة

مسألة: أجريت دراسة على 1000 طفل أصيب خلال السنوات الثلاث الأولى من عمره بمرض ما. بينت الدراسة أن احتمال الإصابة مرتبط بالزمن (X: السنة) من خلال دالة الكثافة التالية:

$$f(x)=\begin{cases} cx^2, & 0<x<3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- ✓ أحسب احتمال أن تكون إصابة طفل مختار عشوائيا من العينة المدروسة في السنة الأولى.

يعالج المرض لمدة شهر، شهر ونصف، أو 3 أشهر حسب الجدول التالي:

X الأشهر	1	1.5	3
الاحتمال	0.5	0.3	0.2

- ✓ أحسب احتمال أن تكون مدة علاج طفل من العينة شهر ونصف على الأكثر.

مفهوم المتغيرة العشوائية

هي قيمة متغيرة يلحق بقيمها احتمالات تحقق كل قيمة. يرمز للمتغيرة ع بحرف لاتيني كبير. ونميز بين م ع المتقطعة وم العشوائبة المتصلة أو المستمرة.

مثال : في تجربة إلقاء مكعب نرد يمكن أن نسمي الوجه الذي يستقر عليه الكعب متغيرة عشوائية X. القيم الممكنة لX هي: 1، 2، 3، 4، 5، 6. بكل قيمة يمكن أن نلحق احتمال تحققها، وهو هنا 1/6. ونكتب مثلا :

$P(X = 1) = f(1) = 1/6,\ \ P(X = 2) = f(2) = 1/6 ,\dots$

لاحظ أن القيم الممكنة ل X (1، 2، 3، 4، 5، 6) هي متنافية، ولذلك فإن مجموع احتمالاتها يساوي 1.

$$\sum_{x=1}^{6} P(X=x)=1$$

مثال 2. في تجربة إلقاء قطعة نقدية مرتين يمكن أن نعين المتغيرة العشوائية X التي تمثل عدد مرات الحصول على كتابة. في هذه الحالة القيم الممكنة ل X هي 0، 1، 2. لا حظ أنه يمكن تعيين متغيرات عشوائية أخرى انطلاقا منن نفس التجربة، مثلا Y عدد مرات الحصول على صورة، وهي متغيرة تأخذ القيم 0، 1، 2، ثم المتغيرة Z بحث = Z X - Y ...

القيم الممكنة ل X هي 0، 2، -2. الاحتمالات الملحقة بقيمها يمكن حسابها كما يلي:

$P(Z = 0) = P(X – Y = 0) = P(X = 0 \text{ et } Y = 0 \text{ ou } X = 1 \text{ et } Y = 1 \text{ ou } X = 2 \text{ et } Y = 2) \Rightarrow$

$P(Z = 0) = 0 + P(X = 1 \text{ et } Y = 1) + 0 = 2 * 0.5^2 = \mathbf{0.5}$

[1] في البرنامج الأصلي: 1– مفهوم المتغيرة العشوائية. اخترنا هذا التقسيم لكي يتناسب كل جزء مع الزمن المخصص للمحاضرة.

المتغيرة العشوائية المتقطعة

و تسمى أيضا م ع منفصلة، وهي التي تأخذ عددا منتهيا من القيم الممكنة في مجال مغلق.

مثال: داخل المجال المغلق [2, 5] المتغيرة X المعرفة في المثال الأول تأخذ 4 قيم ممكنة.

التوزيع الاحتمالي للمتغيرة المتقطعة

هي مجموعة القيم الممكنة مع الاحتمالات المرتبطة بقيم المتغيرة. نرمز للمتغيرة بحرف كبير وللقيم التي تأخذها المتغيرة بحرف صغير. نعبر عن احتمال قيمة معينة كما يلي $P(X = x)$ ونكتب أيضا : $f(x)$. وتسمى الدالة $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية.

مثال: التوزيع الاحتمالي لم ع للمثال الأول (إلقاء مكعب نرد) يكتب كما يلي:

X	1	2	3	4	5	6	
P(X = x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

مثال 2. التوزيع الاحتمالي ل X، عدد مرات الصورة في رميتين لقطعة نقدية:

X	0	1	2	
P(X = x)	1/4	2/4	1/4	1

شروط دالة الكثافة للمتغيرة المتقطعة

نعبر عن احتمال قيمة معينة كما يلي $P(X = x)$ ونكتب أيضا : $f(x)$ وتسمى الدالة $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية.

لكي يمكن اعتبار دالة ما، أيا كانت، دالة كثافة احتمالية يجب أن يتحقق شرطان اثنان:

1) $f(x) \geq 0$

2) $\sum_x f(x) = 1$

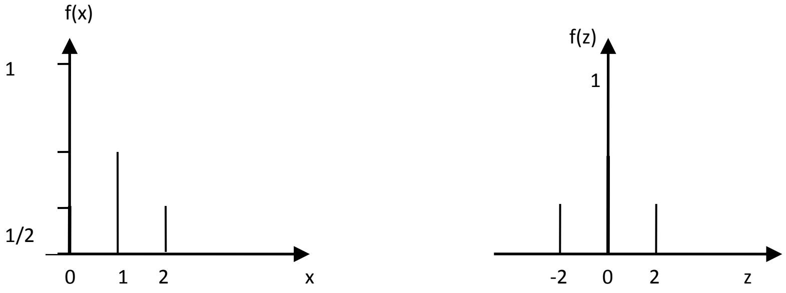
مثال: نأخذ دالة الكثافة ل X نتيجة لإلقاء حجر نرد: $f(1) = f(2) = f(3) = \ldots f(6) = 1/6 \geq 0$,

الشرط الأول محقق، والشرط الثاني أيضا لأن: $\Sigma f(x) = 1/6 + 1/6 + \ldots + 1/6 = 6(1/6) = 1$

التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية ل م ع المتقطعة

تمثل المتغيرة العشوائية المتقطعة ليس من خلال منحنى ولكن من خلال أعمدة متوازية على محور X.

مثال: نمثل بيانيا منحنيات دوال الكثافة ل X وZ المعرفة على إلقاء قطعة نقدية مرتين.



رسم 1 التمثيل البياني لدالة الكثافة للمتغيرة العشوائية المتقطعة

دالة التوزيع F(x) للمتغيرة العشوائية المتقطعة

تعرف دالة التوزيع – وتسمى أيضا "الدالة التجميعية" — كما يلي:

$$\mathbf{F(x) = P(X \le x)}$$

ويمكن استنتاج دالة التوزيع من دالة الكثافة الاحتمالية f(x) كما يلي:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{u \le x} f(u)$$

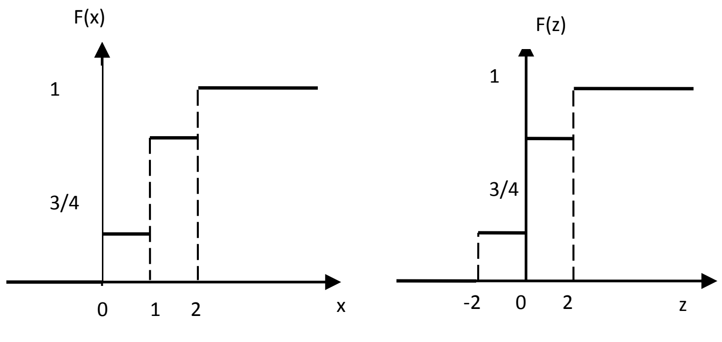
إذا كانت X تأخذ عددا منتهيا من القيم فإن F(x) يمكن تعريفها كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & , \quad x_1 \le x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & , \quad x_2 \le x < x_3 \\ \cdots & \\ f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n), & \quad x_n \le x < +\infty \end{cases}$$

مثال: أوجد قيم F(x) وF(z) للأمثلة السابقة ومثلهما بيانيا.

X	0	1	2
f(x)	1/4	1/2	1/4
F(x)=P(X≤x)	1/4	3/4	1

Z	-2	0	2
f(x)	1/4	1/2	1/4
F(x)=P(X≤x)	1/4	3/4	1



رسم 2 التمثيل البياني لدالة التوزيع للمتغيرة العشوائية المتقطعة

ملاحظة. تأخذ دالة التوزيع للم ع المتقطعة شكلا سلميا، وهي لا تكون متناقصة في أي مجال، وأكبر قيمة ممكنة لها هي 1.

المحاضرة الثانية

مفهوم المتغيرة العشوائية المستمرة وتوزيعها الاحتمالي

تعريف المتغيرة العشوائية المستمرة
التوزيع الاحتمالي للمتغيرة العشوائية المستمرة
خصائص دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المستمرة
دالة التوزيع للمتغيرة العشوائية المستمرة
قاعدة لايبنيتز

تعريف المتغيرة العشوائية المستمرة

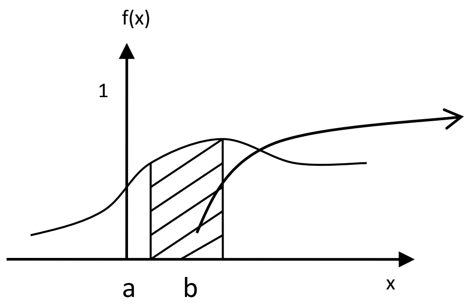
هي متغيرة ع تأخذ عددا لا متناهيا من القيم في مجال محدود، أو هي تأخذ أي قيمة داخل هذا المجال. من أجل هذا فأن وحدات قياس المتغيرة الميتمرة تكون مستمرة مثل الزمن، الوزن، المسافة، الحجم، ...

التوزيع الاحتمالي المستمر

هو مجموعة القيم التي يمكن أن تأخذها المتغيرة ع المستمرة والاحتمالات الملحقة بها. نسمي توزيعا كهذا دالة الكثافة الاحتمالية أو دالة الاحتمال، وهي ممثلة بمنحنى متصل.

لاحظ أنه بما أن X تأخذ عددا لا متناهيا من القيم داخل أي مجال، فإن احتمال قيمة بعينها هو احتمال يؤول إلى الصفر.$P(X=x) \rightarrow 0$ لذلك فإن دالة الكثافة تستعمل لحساب احتمال مجال. ويكون ذلك بحساب المساحة تحت منحنى f(x) بين حدود المجال.

$$\boxed{P(a<x<b)=\int_a^b f(x)dx}$$



رسم3 التمثيل البياني لدالة الكثافة للمتغيرة العشوائية المستمرة

لاحظ أن إشارة التكامل هنا تقابل إشارة المجموع في حالة المتغيرة ع المتقطعة.

خصائص دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المستمرة

باستبدال إشارة التكامل بإشارة المجموع نجد أن شروط دالة الكثافة الاحتمالية للم ع المستمرة تكتب كما يلي :

$$1)\ f(x) \geq 0$$

$$2)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

من البديهي إذا أن منحنى دالة الكثافة لا يمكن أن يترل أسفل محور الم ع، كما أن المساحة الإجمالية بين المنحنى والمحور الأفقي تساوي الواحد.

هذه الخصائص تفيدنا في حساب احتمالات بعض المجالات من خلال احتمالات مجالات أخرى.

مثال: أوجد قيمة الثابت C التي تحقق الشرطين الأول والثاني لدالة الكثافة الاحتمالية في الدالة التالية:

- ✓ أحسب احتمال أن تكون X تنتمي للمجال من 1 إلى 2.
- ✓ أحسب احتمال أن تكون X لا تنتمي للمجال من 1 إلى 2.

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 => \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{3} Cx^2dx + \int_{3}^{+\infty} 0dx = 1 => C\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9C = 1 => C = 1/9$$

لكي تكون x دالة كثافة يجب أن يكون C = 1/9 .

$$P(1 < x \le 2) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (1/9)x^2dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{8-1}{3}\right] = \frac{7}{27}$$

$$P(1 > x > 2) = 1 - P(1 < x < 2) = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$$

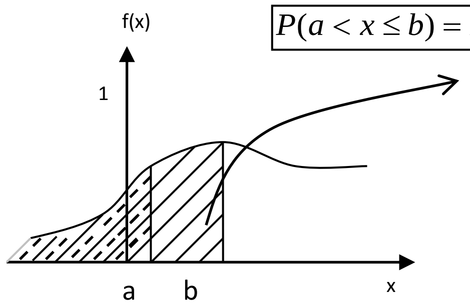
دالة التوزيع F(x) للمتغيرة العشوائية المستمرة

تعرف دالة التوزيع للمتغيرة المستمرة كما يلي:

$$\boxed{F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du}$$

لدالة التوزيع أهمية أكبر بالنسبة للمتغيرة المستمرة. السبب في ذلك أننا نهتم، في حالة المتغيرة المستمرة، باحتمال مجال وليس باحتمال نقطة، ولحساب احتمال مجال من الأيسر التعويض في دالة التوزيع بدلا من حساب التكامل في كل مرة. يتضح ذلك من القاعدة التالية: بفرض a, b نقطتان من مجال تعريف X، بحيث b > a . لحساب احتمال أن تكون X تنتمي إلى المجال [a, b] :

$$\boxed{P(a < x \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)}$$



رسم 4 حساب الاحتمال من خلال دالة التوزيع

مثال:

أوجد دالة التوزيع للمتغيرة المذكورة في المثال السابق.

استخدم دالة التوزيع لحساب الاحتمال: P(1< x <2).

$$*x < 0: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du = 0$$

$$*0 \le x < 3: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{x} \frac{1}{9}u^2du = \frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{27}$$

$$*x \ge 3: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{3} \frac{1}{9}u^2du + \int_{3}^{x} 0du = 0 + \frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^3 + 0 = \frac{27}{27} = 1$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^3/27 & 0\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}\qquad P(1<x\le 2)=F(2)-F(1)=\frac{2^3}{27}-\frac{1^3}{27}=\frac{7}{27}$$

قاعدة لايبنيز Règle de LEIBNITZ

تفيد هذه القاعدة الرياضية العامة في استنتاج أن مشتقة دالة التوزيع هي دالة الكثافة:

$$\boxed{\frac{d\int_{-\infty}^{x} f(u)du}{dx}=f(x)\Rightarrow\frac{dF(x)}{dx}=f(x)}$$

مثال: أوجد دالة الكثافة للمتغيرة X إذا كانت دالة التوزيع كما يلي:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-2x} & x\ge 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$*\,x<0: f(x)=F'(x)=(0)'=0$$
$$*\,x\ge 0: F(x)=1-e^{-2x}\Rightarrow f(x)=\left(1-e^{-2x}\right)'=2e^{-2x}$$

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

خلاصة المبحث الأول و الثاني

يتم تعريف التوزيع الاحتمالي (أو القانون الاحتمالي) لمتغيرة عشوائية من خلال تحديد القيم الممكنة للمتغيرة و الاحتمالات المقابلة لها.

يتم هذا التحديد إما من خلال جدول (جدول التوزيع الاحتمالي) أو دالة، تسمى دالة كثافة الاحتمالية.

لكي نقول عن دالة ما أنها دالة كثافة احتمالية يجب أن تكون موجبة دوما و أن يكون مجموع الاحتمالات مساويا للواحد.

الدالة التجميعية (أو دالة التوزيع) تمثل احتمال مجال من أصغر قيمة للمتغيرة إلى نقطة ما:

$F(x)=P(X\le x)=\sum_{u\le x} f(u)$ في حالة م متقطعة و $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du$ في حالة م مستمرة.

نظرا لتعريفها تأخذ دالة التوزيع مسارا متزايدا (أو ثابتا على أجزاء من المجال). تبرز أهمية الدالة التجميعية أكثر عندما تكون المتغيرة مستمرة لأننا نهتم حينها باحتمالات مجالات. يمكن استنتاج دالة الكثافة من خلال اشتقاق دالة التوزيع.

المحاضرة الثالثة

التوقع الرياضي والتباين

التوقع الرياضي
التباين والانحراف المعياري
العزوم
الدالة المتجددة للعزوم
نظرية شيبيشيف، نظرية الأعداد الكبيرة

مسألة: أرسلت مؤسسة عروضا إلى 4 عملاء. احتمال تلقي طلبية من العميل الأول هي 0.2، من العميل الثاني 0.3، من العميل الثالث 0.35 و0.4 من العميل الرابع. في انتظار ردود العملاء ما هو العدد المتوقع من الطلبيات؟

في العديد من الحالات لا يكفي حساب احتمال تحقق حدث أو أحداث معينة بل نحتاج للخروج بتوقع معين يلخص الوضعية المطروحة أمامنا. من جهة أخرى قد يصعب المفاضلة بين خيارات متاحة مقيمة بمبالغ معينة بسبب ارتباط كل مبلغ بمخاطرة مختلفة؛ من المعروف أن الاستثمارات الأكثر مردودية هي تلك التي تتضمن أكبر مخاطرة، فكيف يمكن أخذ في الحسبان المخاطرة والمبلغ المتوقع وبطريقة دقيقة وموضوعية؛ إن طريقة التوقع وبقية المفاهيم الأخرى الواردة أعلاه يمكن أن تساعدنا في ذلك.

التوقع الرياضي Espérance mathématique

تعريف التوقع
توقع دالة

تعريف التوقع

يعرف التوقع الرياضي لمتغيرة عشوائية متقطعة كما يلي:

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)}$$

و يعرف التوقع الرياضي لمتغيرة عشوائية مستمرة كما يلي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

نرمز للتوقع أحيانا ب μ أو μ_x.

مثال: نلقي قطعة نقدية 4 مرات. أحسب العدد المتوقع من المرات التي نحصل فيها على وجه.

Xعدد مرات وجه	0	1	2	3	4	المجموع
P(X)	$(1/2)^4$	$4\,(1/2)^4$	$6\,(1/2)^4$	$4\,(1/2)^4$	$(1/2)^4$	16/16 = 1
XP(X)	0	$4\,(1/2)^4$	$12\,(1/2)^4$	$12\,(1/2)^4$	$4\,(1/2)^4$	32/16 = 2

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)=32/16=2$$

العدد المتوقع هو مرتين من بين 4 رميات.

مثال 2. نلقي قطعة نقدية مرة واحدة. يربح اللاعب 20 دج إذا حصل على الرقم 2، ويربح 40 دج إذا حصل على الرقم 4، و60 دج إذا حصل على الرقم 6، ويخسر 10 دج إذا حصل على الرقم 1، 30 دج إذا حصل على الرقم 3، و50 دج إذا حصل على الرقم 5. تحقق مما إذا كانت العبة متوازنة (هل توقع الربح يساوي توقع الخسارة).

الجواب هو أن اللعبة غير متوازنة لأن توقع الربح أكبر من توقع الخسارة $E(x) = 30/6 = 5 > 0$

نتيجة الرمي	1	2	3	4	5	6	المجموع
نتيجة المراهنةX	-10	20	-30	40	-50	60	-
P(X=x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	6/6
X*P(X=x)	-10/6	20/6	-30/6	40/6	-50/6	60/6	(120-90)/6>0

مثال3. أوجد التوقع الرياضي للمتغيرة ذات دالة الكثافة التالية:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0<x<2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x.0.dx+\int_{0}^{2} x(\frac{1}{2}x)dx+\int_{2}^{\infty} x.0.dx$$

$$E(x)=0+\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+0=\frac{4}{3}$$

توقع دالة

يستخدم توقع دالة عند حساب عدد من المقاييس مثل التباين، العزوم المركزية والعزوم المرتبطة بالأصل.

لتكن X م ع لها دالة كثافة f(x)، و$y = g(x)$ م ع تابعة لها.

$$E(Y)=E(g(x))=\sum_x g(x)f(x)$$

في حالة X م متصلة:

$$E(Y)=E(g(x))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

مثال1. نلقي قطعة نقدية مرتين. نسمي X عدد مرات الحصول على صورة، و$Y=X^2$. أحسب E(X) وE(Y) .

X	0	1	2	المجموع
P(X = x)	1/4	1/2	1/4	1
X*P(X)	0	1/2	1/2	E(X) =1
X^2	0	1	4	

$X^2 * P(X)$	0	1/2	1	$E(X^2) = 3/2$

مثال2: لتكن X م ع ذات دالة الكثافة التالية، و$Y = g(x) = 3x^2 - 2x$. أحسب E(Y).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(Y) = E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (3x^2 - 2x)(0) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (3x^2 - 2x)(x/2) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (3x^2 - 2x)(0) dx$$

$$E(Y) = 0 + \int_{0}^{2} (3x^2 - 2x)(x/2) dx + 0 = \frac{1}{2}\left[\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[12 - \frac{16}{3}\right] = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

خصائص التوقع الرياضي

$E(C) = C$
$E(CX) = CE(X)$
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
$E(XY) = E(X)E(Y)$ إذا كانت المتغيرتان مستقلتان.

مثال: تتوقع مؤسسة أن تتلقى كل شهر 3 طلبيات من العميل A و4 من B .

- أحسب العدد المتوقع من الطلبيات المتلقاة من A في السنة.
- أحسب العدد الإجمالي المتوقع من الطلبيات المتلقاة في شهر.

يعين كل عميل من طرفه مندوبا عن كل طلبية لمتابعة إتمامها. كم تتوقع أن يلزم من مقابلة لتعريف مندوبي العميل A بمندوبي B.

$E(12A) = 12E(A) = 12(3) = 36$
$E(A*B) = E(A)*E(B) = 4*3 = 12.$
$E(A + B) = E(A) + E(B) = 3 + 4 = 7$

التباين والانحراف المعياري Variance et écart type

تعريف التباين
خصائص التباين
المتغيرة المعيارية

تعريف التباين

يعرف التباين لمتغيرة عشوائية كما يلي:

$$\boxed{\sigma_X{}^2 = Var(X) = E\left[(X - \mu)^2\right]}$$

و الانحراف المعياري هو جذر التباين. $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2}$.

في حالة المتغيرة العشوائية المتقطعة :

المحاضرة الرابعة

$$V(X) = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$$

في حالة المتغيرة العشوائية مستمرة :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

مثال. نلقي قطعة نقدية مرتين. نسمي X عدد مرات الحصول على صورة، أحسب V(X) .

X	0	1	2	المجموع
P(X = x)	1/4	1/2	1/4	1
X*P(X)	0	1/2	1/2	E(X) = μ =1
(X-μ)²	1	0	1	
(X-μ)² * P(X)	1/4	0	1/4	V(X) = 1/2

مثال 2. لتكن X م ع ذات دالة الكثافة التالية؛ أحسب تباين X.

$$\mu = 4/3 \qquad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{0} \left(x-\frac{4}{3}\right)^2 * 0dx + \int_{0}^{2} \left(x-\frac{4}{3}\right)^2 \frac{x}{2}dx + \int_{2}^{+\infty} \left(x-\frac{4}{3}\right)^2 0dx = 0 + \frac{1}{2}x\left(x^2 - \frac{8x}{3} + \frac{16}{9}\right)_0^2 + 0$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\left(x^3 - \frac{8x^2}{3} + \frac{16x}{9}\right)_0^2 = \frac{1}{2}\left(8 - \frac{32}{3} + \frac{32}{9}\right) = \frac{4}{9}$$

خصائص التباين

V(X) = E(X²) - E(X)²
V(CX) = C²V(X) , V (C) = 0

في حالة استقلال المتغيرتان عن بعضهما

V(X - Y) = V(X) + V(Y) , V(X + Y) = V(X) + V(Y)

مثال: نلقي قطعة نقدية مرتين. نسمي X عدد مرات الحصول على صورة، أحسب V(X) باستخدام الصيغة **V(X) = E(X²) - E(X)²** .

لتكن المتغيرة Y = 2X. أحسب V(Y) ، نلقي حجر نرد ونسمي Z النتيجة المحصل عيها. أحسب تباين المتغيرة W حيث: W = Z - Y

X	0	1	2	المجموع
P(X = x)	1/4	1/2	1/4	1
X P(X)	0	1/2	1/2	E(X) = μ =1
$(X)^2$	0	1	4	
$(X)^2$ * P(X)	0	1/2	1	$E(X)^2 = 3/2$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (3/2) - 1 = 1/2$
$V(Y) = V(2X) = 2^2V(X) = 4\ (1/2) = 2.$
$V(W) = V(Z-2X) = V(Z) + V(2X) = V(Z) + 2^2V(X).$
$V(Z) = E(Z^2) – E(Z)^2 = (1/6)[1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2]-(1/6)[1+2+3+4+5+6] = 70/6$
$V(W) = (70/6) + 4\ (1/2) = 82/6 = 13.67$

المتغيرة المعيارية Variable centrée réduite

يمكن أن نلحق بأي متغيرة عشوائية X متغيرة معيارية (تسمى أيضا المتغيرة المركزية) ويرمز لها *X . تلحق المتغيرة المعيارية بالمتغيرة الحقيقية من أجل المقارنة لأن المتغيرة المعيارية ليس لها وحدة كالمتر أو الساعة ... وإنما هي تعبر عن كل قيمة x ل X من خلال المسافة بين x والتوقع μ محسوبة لس بالوحدة الأصلية وإنما بالانحرافات المعيارية.

$$\boxed{X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}}$$

من خلال خصائص التوقع والتباين نستخرج التوقع والتباين للمتغيرة المعيارية.

$$E(X^*) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}\left[E(X) - E(\mu)\right] = 0$$

$$V(X^*) = E\left[\left(X^* - E(X^*)\right)^2\right] = E\left[\left(X^* - 0\right)^2\right] = E(X^{*2}) = E\left(\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2}E\left(X-\mu\right)^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

مثال: أحسب *X من أجل متوسط 70، انحراف معياري 5، وX يساوي: 55، 60، 50، 75، 80، 70.

الجواب: القيم هي: -3، -2، -4، 1، 2، 0.

مثال 2. يتدرب عاملان أحمد وعلي من أجل المشاركة في ماراتون عيد العمال 1 ماي. يشترط يوم المسابقة أن يكون وزن المترشح لا يتجاوز المجال $\mu \pm 1.5\sigma$.

إذا كان الوزن المتوسط بالكغ هو $\mu = 70$ والانحراف المعياري هو 5 كغ. هل سيقبل العاملان أحمد وعلي إذا كان وزنهما: 77 كغ، و80 كغ؟

الجواب: مجال القبول هو من 62.5 كغ إلى 77.5 كغ، لذلك فسيرفض علي ويقبل أحمد.

خلاصة

التوقع الرياضي و التباين هي أهم المؤشرات المعبرة عن خصائص المتغيرة و يحسبان كما يلي، حسب كون المتغيرة متقطعة أو مستمرة:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i f(x_i)$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

لكل من التوقع و التباين 4 خصائص أساسية تتمثل فيما يلي:

E (C) = C توقع عدد ثابت	V(C) = 0
E(CX) = CE(X)	$V(CX) = C^2V(X)$
E(X+Y) = E(X) + E(Y)	في حالة استقلال المتغيرتان عن بعضهما V(X + Y) = V(X) + V(Y) V(X - Y) = V(X) + V(Y) ,
E(XY) = E(X)E(Y) في حالة استقلال المتغيرتان عن بعضهما.	$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

من أجل المقارنة بين المتغيرات تستخدم المتغيرة المعيارية التي تسمح بالتعبير عن قيمة x ليس من خلال وحداتها الأصلية (كغ، متر، زمن، ...) وإنما بعدد الانحرافات المعيارية التي تفصل بين القيمة x والتوقع الرياضي.

التوقع الرياضي والتباين للمتغيرة المعيارية $X^*=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ هما على التوالي 0 و 1.

لحساب التوقع الرياضي لدالة ما في X (مثلا التباين، أو X^2) نضرب قيم الدالة في الاحتمالات المقابلة لـX:

$$E(Y)=E(g(x))=\sum_x g(x)f(x)$$

$$E(Y)=E(g(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$$

المحاضرة الخامسة

العزوم و الدالة المتجددة للعزوم

العزوم
الدالة المتجددة للعزوم

1 العزوم Les moments

كما التباين يعتبر العزم من تطبيقات توقع دالة. نميز بين نوعين من العزوم: العزم المركزي والعزم المرتبط بالأصل.

تستخدم العزوم في حساب عدد من المقاييس مثل معامل التماثل α3 (coefficient d'asymétrie) ومعامل التفلطح α4 (Kurtosis ou coefficient d'aplatissement).

(أ) العزم المركزي **Le moment central μ_r**.

يعرف العزم المركزي من الدرجة r للم ع X كما يلي:

$$\mu_r = E\left((X-\mu)^r\right), \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mu_0 = E\left[(X-\mu)^0\right] = E(1) = 1 \qquad \mu_0 = 1$$

$$\mu_1 = E\left[(X-\mu)^1\right] = E(X) - E(\mu) = 0 \qquad \mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = V(X) \qquad \mu_2 = \sigma^2$$

يحسب العزم المركزي حسب طبيعة المتغيرة متقطعة أو مستمرة كما يلي:

$$\mu_r = \sum_i (x_i - \mu)^r f(x) \qquad\qquad \mu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^r f(x)dx$$

مثال . أحسب العزوم المركزية من الدرجة 0، 1، 2 و3 للمتغيرة ع ذات دالة الكثافة:

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mu_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^0 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 f(x)dx = 1$$

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx - \mu\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \mu - \mu(1) = 0$$

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \sigma^2 = \frac{4}{9}$$

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^3 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \left(x-\frac{4}{3}\right)^3 (0)dx + \int_{0}^{2} \left(x-\frac{4}{3}\right)^3 \frac{x}{2}dx + \int_{2}^{+\infty} \left(x-\frac{4}{3}\right)^3 (0)dx = \frac{16(67)}{27(5)}$$

مثال: أحسب العزوم المركزية من الدرجة 0، 1، 2 و3 للمتغيرة ع المتقطعة التي تمثل عدد مرات الحصول على صورة في رميتين لقطعة نقدية.

ب) العزم المرتبط بالأصل Moment autour de la moyenne μ'_r

يعرف العزم المرتبط بالأصل كما يلي:

$$\boxed{\mu'_r = E(X^r), \quad r = 0,1,2,...}$$

$$\mu'_0 = E(X^0) = E(1) = 1 \qquad\qquad \mu'_0 = 1$$

$$\mu'_1 = E(X^1) = E(X) = \mu \qquad\qquad \mu'_1 = \mu$$

$$\mu'_2 = \mu^2 - \sigma^2 = \mu^2 - \mu_2 \qquad\qquad \mu'_2 = \mu^2 - \mu_2$$

مثال: أحسب العزوم المرتبطة بالأصل من الدرجة 0، 1، 2، 3 و4 للمتغيرة ع المتصلة ذات دالة الكثافة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \qquad \mu'_1 = \mu = 4/3, \qquad \mu'_2 = \mu^2 - \mu_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} = \frac{12}{9},$$

$$\int_0^2 x^3 (\frac{x}{2})dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{16}{5}, \qquad \mu'_4 = \int_0^2 x^4 (\frac{x}{2})dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

مثال2. أحسب العزوم المرتبطة بالأصل من الدرجة 0، 1، 2، 3 و4 للمتغيرة ع المتقطعة التي تمثل عدد مرات الحصول على صورة في رميتين لقطعة نقدية.

ج) العلاقة بين العزم المركزي والعزم المرتبط بالأصل

$$\mu_r = \mu'_r - C_r^1 \cdot \mu'_{r-1} \cdot \mu^1 + ... + (-1)^i C_r^i \cdot \mu'_{r-i} \cdot \mu^i + ... + (-1)^r \cdot \mu'_0 \cdot \mu^r$$

يمكن أيضا الحصول على العزوم المرتبطة بالأصل من الدرجة r من خلال اشتقاق الدالة المتجددة للعزوم r مرة.

2 الدالة المتجددة للعزوم La fonction génératrice des moments $M_x(t)$

الدالة المتجددة للعزوم هي دالة مرتبطة بمتغيرة (معلمة) t بالإضافة إلى ارتباطها ب X، ود م ع كما يلي:

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

في حالة م ع متقطعة: $M_x(t) = \sum_x e^{tx} f(x)$ و في حالة م ع مستمرة:

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx$$

مثال: أكتب الدالة المتجددة للعزرم من أجل $t \neq 0$ للم ع المعرفة في كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{tx}(0)dx + \int_0^2 e^{tx} f(x)dx + \int_2^{+\infty} e^{tx}(0)dx = 0 + \frac{1}{2}\int_0^2 xe^{tx}dx + 0$$

$$M_x(t) = \frac{1}{2}\int_0^2 UdV = \frac{1}{2}\left[[UV]_0^2 - \int_0^2 VdU\right]. \qquad U = x \Rightarrow dU = dx,\ dV = e^{tx}dx \Rightarrow V = \frac{e^{tx}}{t}$$

$$M_x(t)=\frac{1}{2}\left(\left[x\frac{e^{tx}}{t}\right]_0^2-\int_0^2\frac{e^{tx}}{t}dx\right)=\frac{1}{2}\left(\left[2\frac{e^{2t}}{t}\right]-\frac{1}{t}\left[\frac{e^{2t}}{t}\right]\right)=\frac{e^{2t}}{t}-\frac{e^{2t}}{2t^2}$$

تستخدم الدالة المتجددة للعزوم لحساب العزم المركزي من درجة r:

$$\boxed{\mu_r'=\frac{d^r M_x(t)}{dt^r}\ avec\ t=0}$$

كما تستخدم الد م ع لإثبات تساوي توزيعين احتماليين، مثلا عند تحقق شروط معينة، ونحتاج ذلك خاصة عند دراسة التقارب بين التوزيعات الاحتمالية. النظرية التي نستعملها في ذلك هي كالآتي:

لتكن م ع X وY لهما الد م ع $M_x(t)$ و $M_y(t)$؛ نقول أن م ع X وY لهما نفس التوزيع الاحتمالي إذاا:

$$\mathbf{M_x(t) = M_y(t)}$$

كما تستخدم الد م ع لإثبات إستقلال توزيعين احتماليين. النظرية التي نستعملها في ذلك هي كالآتي:

إذا X وY م ع مستقلتان، لهما الد م ع $M_x(t)$ و $M_y(t)$؛ فإن: $\mathbf{M_{x+y}(t) = M_x(t)\ .\ M_y(t)}$

3 خلاصة

العزم و الدالة المتجدد للعزوم هي عبارة عن توقعات دوال (أنظر المبحث السابق). يدخل العـــزم في حســـاب بعـــض المؤشرات مثل التباين و التوقع الرياضي، معامل التفلطح و معامل التماثل.

يعرف العزم المركزي من الدرجة r للم ع X كما يلي: $r=0,1,2,\ldots$ $\quad \mu_r=E\left((X-\mu)^r\right),$

يعرف العزم المرتبط بالأصل كما يلي: $\mu_r'=E(X^r),\ \ r=0,1,2,\ldots$

تعرف الدالة المتجددة للعزوم كما يلي: $M_x(t)=E(e^{tx})$

تستخدم الدالة المتجددة للعزوم لإثبات التقارب بين توزيعات احتمالية و ذلك من خلال نظريتين أساسيتين.

- نقول أن م ع X وY لهما نفس التوزيع الاحتمالي إذاا: $M_x(t) = M_y(t)$
- إذا X وY م ع مستقلتان فإن: $M_{x+y}(t) = M_x(t)\ .\ M_y(t)$